

ハイレベル小5算数 No.22

場合の数②
(図形の数、円順列・数珠順列)

齋田算数理科教室®

氏名:

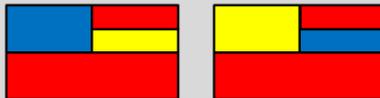
1. 色のぬり分け

一となり合うところは別の色にしなければならない。

例題: 四国4県を赤、青、黄の3色を使ってぬり分けるとき、次の問いに答えなさい。



(1) 高知県を赤にぬるとき、全部で何通りのぬり分け方がありますか。



答え 2通り

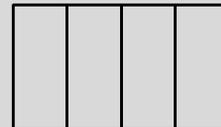
(2) 全部で何通りのぬり分け方がありますか。

・高知県を何色でぬるかは、赤、青、黄の3通り。それぞれについて2通りずつのぬり分け方があるので、

$$3 \times 2 = 6$$

答え 6通り

例題: 右の図のような国旗を、赤、青、黄、緑の4色を使ってぬり分けるとき、次の問いに答えなさい。



(1) 2色だけでぬり分けるとき、何通りのぬり分け方がありますか。

・まず、赤と青の2色でぬり分けを考える。赤と青のぬり分け方は、下の通りたった2通りだけです。



・次に色の選び方は、4色からどの2色を選ぶかを考えれば良いので、

$${}^4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

・6通りのそれぞれに対して、2通りのぬり分け方があるので、

$$6 \times 2 = 12$$

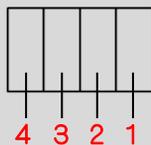
答え 12通り

(2) 3色を使うと、何通りのぬり分け方がありますか。

パスして後回しにします。

(3) 4色すべてを使うとき、何通りのぬり分け方がありますか。

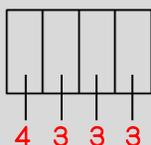
・4色すべてを使いきらないといけない(使わない色があってもいけない)ので、



$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ (通り)}$$

答え 24通り

(4) 全部で何通りのぬり分け方がありますか。



$$4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108 \text{ (通り)}$$

答え 108通り

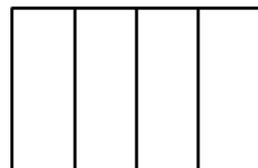
先ほどパスした問題

(2) 3色を使うと、何通りのぬり分け方がありますか。

$$(4) - \{(1) + (3)\} = 72$$

答え 72通り

1. 次の図を、赤、青、黄の3色を使ってぬり分けます。
次のそれぞれの問題について答えなさい。
(サイダ中)

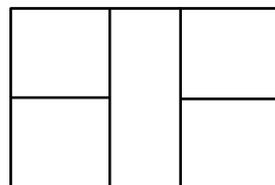


(1) 2色だけを使ってぬり分けるとき、何通りのぬり分け方がありますか。

(2) 3色を使ってぬり分けるとき、何通りのぬり分け方がありますか。

(3) 全部で何通りのぬり分け方がありますか。

2. 次のような旗を、赤、青、黄、緑の4色を使ってぬり分けます。(サイダ中)
(1) 2色だけを使ってぬり分けることはできますか。

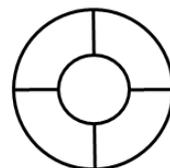


- (2) 3色だけを使ってぬり分けるとき、何通りのぬり分け方がありますか。

- (3) 4色全てを使ってぬり分けるとき、何通りのぬり分け方がありますか。

- (4) 全部で何通りのぬり分け方がありますか。

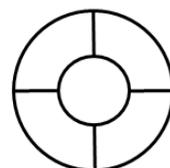
3. 次のような図形を、赤、青、黄の3色を使ってぬり分けます。
ただし、図形は回転できないものとし、(サイダ中)



- (1) 2色だけを使ってぬり分けることはできますか。

- (2) 3色を使ってぬり分けるとき、何通りのぬり分け方がありますか。

4. 次のような図形を、赤、青、黄の3色を使ってぬり分けます。
ただし、図形は回転できるものとし、回転して同じになるものは、1通りと数えることとします。(サイダ中)



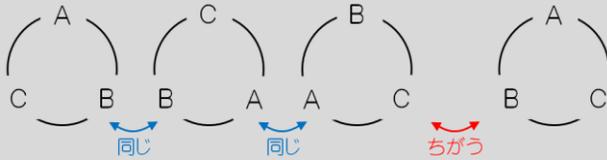
- (1) 2色だけを使ってぬり分けることはできますか。

- (2) 3色を使ってぬり分けるとき、何通りのぬり分け方がありますか。

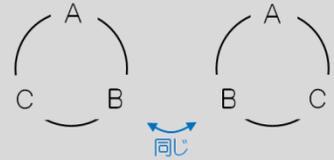
2. 円順列と数珠順列

- 「」…ひっくり返すと大変なことになる。
- 「」…ひっくり返しても大変なことにならない。

円順列

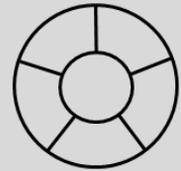


数珠順列

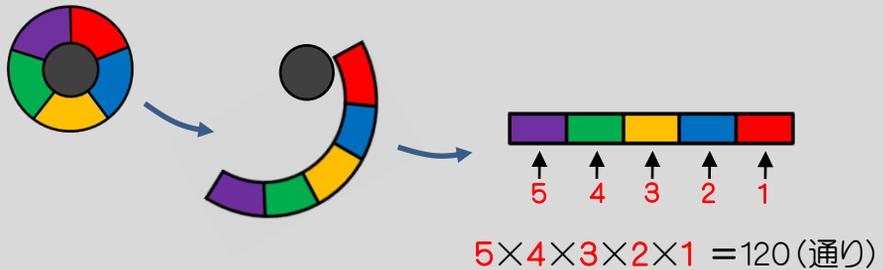


(1) 円順列

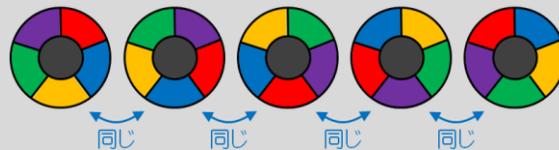
例題: 図のような紙があり、中心には黒がぬってあり、黒の場所は固定しておきます。その周りを赤、青、オレンジ、緑、むらさきの5色を使ってぬり分けるとき、全部で何通りのぬり分け方がありますか。ただし、この紙は回転できるものとし、回転しても同じものは1通りと考えます。



まずは、この図形が回転できないものとして考えます。



ところがこの図形は、実際は回転できるので、下の5つは同じこと。



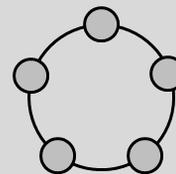
$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5}$$

答え : 24通り

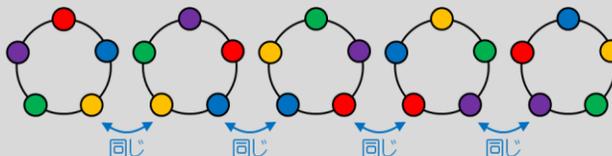
$$n \text{ 個の円順列} = (n-1) !$$

(2) 数珠順列

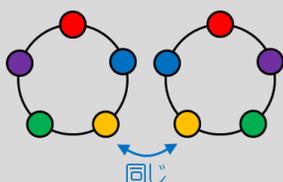
例題: 図のようなネックレスを作ります。周りの宝石は、赤、青、オレンジ、緑、むらさきの5種類を使います。全部で何通りのネックレスができますか。ネックレスなので、裏返しても同じになるならば1通りと考えます。



考え方は、円順列に似ています。



円順列とちがうのは、裏返しても同じになるパターンが2つずつ存在するということ。



$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2}$$

答え : 12通り

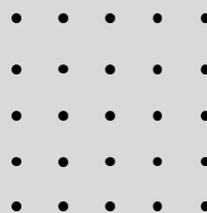
$$n\text{個の数珠順列} = \frac{(n-1)!}{2}$$

5. 5人の生徒が手をつないで輪をつくります。ならば方は全部で何通りありますか。(本郷中)

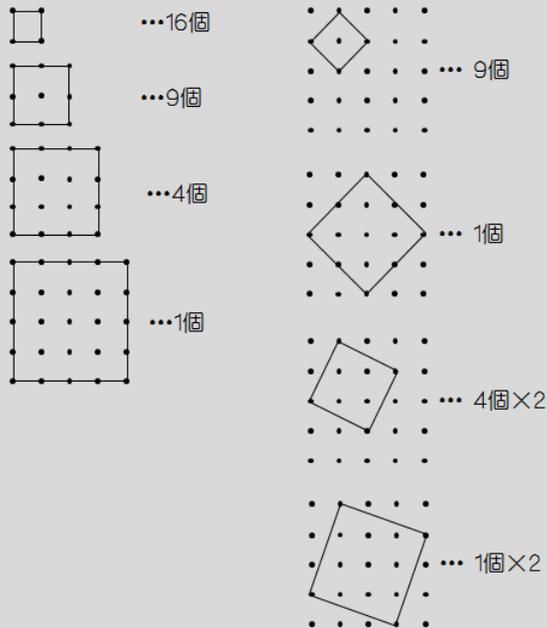
6. 6種類の違う宝石を使ってネックレスを作ります。全部で何通りのネックレスができるでしょうか。(サイダ中)

3. 図形の数(「No.14 規則性」の復習)

例題：右の図のように25個の点が等しい間隔でならんでいます。点と点を結んで正方形をつくる時、全部でいくつの正方形ができますか。



正方形を大きさ別に分けて考えます。



答え：50個

例題：右の図のように、円周上に6つの点があります。このうち3つの点を直線で結んでできる三角形は、全部でいくつありますか。(成安女子中)

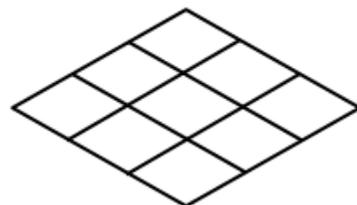


6つの点から3点を選ぶと三角形ができます。

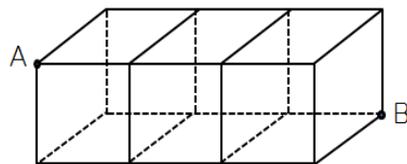
$${}^6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$$

答え 20通り

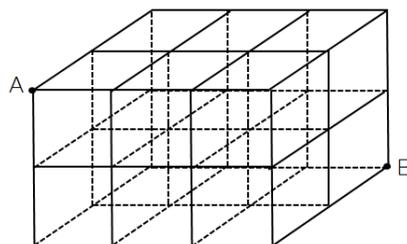
7. 右のような図形に、平行四辺形は全部でいくつありますか。ただし、ひし形も平行四辺形と数えることとします。(サイダ中)



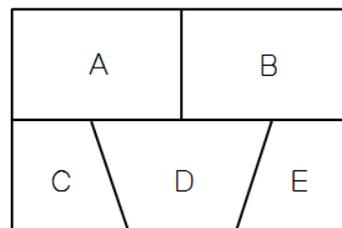
8. 立方体を3個ならべて、次の図のような立体を作りました。立方体の辺を
通って、最も短い距離でAからBまで行く方法は、全部で何通りありますか。
(立教大付属中)



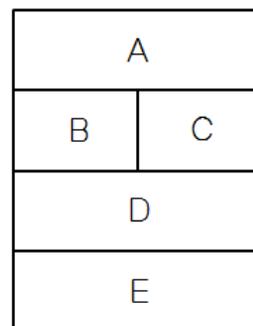
9. 立方体を12個使って、次の図のような立体を作りました。立方体の辺を
通って、最も短い距離でAからBまで行く方法は、全部で何通りありますか。
(サイダ中)



10. 右の図のように、長方形をA、B、C、D、Eの5つの部分に分け、赤、青、黄の
3色でぬり分けます。となり合う部分はちがう色にぬり分けるとき、全部
で何通りのぬり分け方がありますか。(市川中)



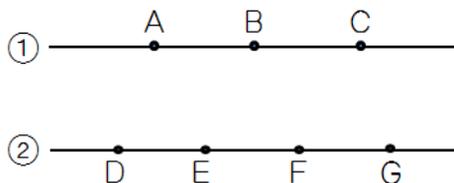
11. 右の図のように、AからEまでの5つに分けた形を、赤、青、黄の3色でぬり
分けます。ぬり方は何通りありますか。ただし、同じ色を2回使ってもよ
いですが、となりどうしは異なる色でぬることとします。(本郷中)



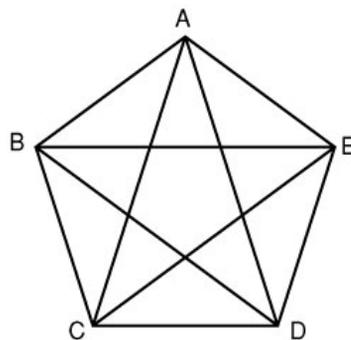
12. A、B、C、Dの4人が長いすにすわります。AとBがとなり合わないすわり方は、全部で何通りありますか。(目黒学院中)



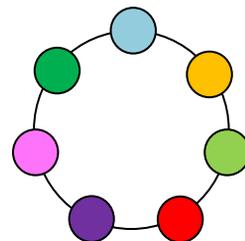
13. 右の図のように、2本の直線①②上に、A、B、C、D、E、F、Gの7つの点があります。この7点から3つの頂点を選んで三角形をつくる時、何通りの三角形ができますか。(逗子開成中)



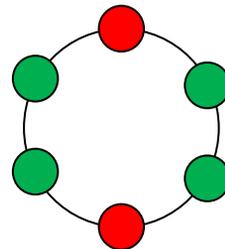
14. 右の図のような正五角形があります。この中に、二等辺三角形は全部で何個ありますか。(サイダ中)



15. 7種類の宝石があります。これらを1つずつすべて使ってネックレスを作るとき、全部で何通りのネックレスを作ることができますか。ただし、回転しても、裏表を逆にしても同じものは1通りとします。(サイダ中)



16. 緑色の玉が4個と、赤色の玉が2個あります。これをすべて使ってネックレスを作るとき、全部で何通りのネックレスを作ることができますか。ただし、回転しても、裏表を逆にしても同じものは一通りとします。(サイダ中)



17. 両親、息子2人、娘2人の6人を円形に並べます。次のような並び方はそれぞれ何通りありますか。(サイダ中)
- (1) 両親が必ず隣り合う並び方。

(2) 男性と女性が交互に並ぶ並び方。

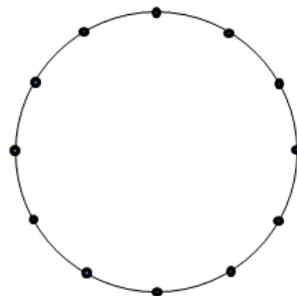
(3) 両親が正面に向き合う並び方。

18. 右の図のような7段の階段があります。1段ずつのぼるのと1段飛ばしをまぜてよいとすると、のぼり方は全部で何通りありますか。
(渋谷教育幕張中)



19. 右は12等分円です。次のそれぞれの問いに答えなさい。(サイダ中)

- (1) このうち2点を選んで直線を引くとき、直線は何通り引くことができますか。



- (2) 3点を選んで三角形をつくる時、二等辺三角形は何個つくることができますか。

- (3) 3点を選んで三角形をつくる時、直角三角形は何個つくることができますか。

20. 立方体の表面を5色を使ってぬり分けます。何通りのぬり分け方がありますか。(サイダ中)

21. 右の図のような7段の階段があります。1段ずつのぼるのと1段と飛ばし、**2段飛ばし**をまぜてよいとすると、のぼり方は全部で何通りありますか。(サイダ中)



よんしよくていり

四色定理 …「いかなる地図も、4色あれば色のぬり分けが可能である。」

長年、数学者をなやませてきた問題で、最近やっと解決されました。「四色問題」とも呼ばれます。日本の場合、いちばん多い県境を持つのは長野県の8県ですが、長野県を赤にして実際に4色で都道府県を色分けしてみてください。(今でなく、ヒマなときに)

日本だけではありません。アメリカの50州も4色あればぬり分けが可能です。実際には、「飛び地」があつたりすると、その飛び地の色が限定されてしまうため、飛び地まで含めると4色でのぬり分けができない場合があります。

ただしこれはあくまでも平面上での話であり、立方体などの立体になると「四色定理」は崩れます。



解 答

1. (1) 6通り (2) 18通り (3) 24通り
2. (1) できません。 (2) 48通り (3) 96通り (4) 144通り
3. (1) できません。 (2) 6通り
4. (1) できません。 (2) 3通り
5. 24通り
6. 60通り
7. 36個
8. 20通り
9. 210通り
10. 6通り
11. 12通り
12. 12通り
13. 30通り
14. 35個
15. 360通り
16. 3通り
17. (1) 48通り (2) 12通り (3) 24通り
18. 21通り
19. (1) 66通り (2) 52個 (3) 60個
20. 15通り
21. 44通り