ハイレベル小5算数
No.21

場合の数①
（順列と組み合わせ）

齋田算数理科教室®

氏名:

講 義

1. 順列と組み合わせ

ー5人の中から2人を選ぶ選び方は何通り？ ・・・ $\boxed{\quad}$

2人の順番は関係ない。どのような組み合わせになるかということだけ。

ー5人の中から図書係と音楽係を選ぶ選び方は何通り？ ・・・ $\boxed{\quad}$

図書係を1番目の係、音楽係を2番目の係と考えると、順番が関係ある。

(1) 順列

例題: A、B、C、D、Eの5人から委員長と副委員長を選ぶ選び方は、全部で何通りありますか。

A、B、C、D、E

↓ブチこむ

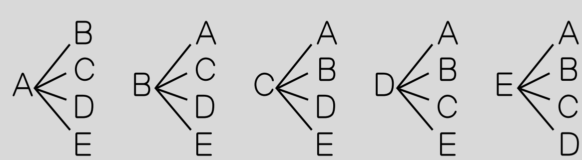
＿ ＿
委 副

5 4
委 副

このとき、$\underset{委\ \ 副}{A\ B}$ と $\underset{委\ \ 副}{B\ A}$ は全くちがうものになるので、これで2通りと考えます。

5×4＝20（通り）

・樹形図を描く方法



・書き出し法

(A、B)	(B、A)	(C、A)	(D、A)	(E、A)
(A、C)	(B、C)	(C、B)	(D、B)	(E、B)
(A、D)	(B、D)	(C、D)	(D、C)	(E、C)
(A、E)	(B、E)	(C、E)	(D、E)	(E、D)

・計算で。。。

$${}_5P_2 = 5\times4 = 20$$

答え　20通り

5から連続して小さい順に2つの数をかけるという意味。
Pは、Permutation（パーミュテーション）と読みます。

(2)組み合わせ

例題: A、B、C、D、Eの5人から2人の委員を選ぶ選び方は、全部で何通りありますか。

A、B、C、D、E

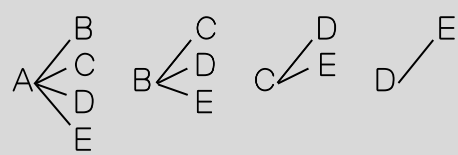
↓ブチこむ

このとき、A B と B A は同じものになるので、これで1通りと考えます。

5 4

5×4＝20(通り)
ところが、それぞれ2通りずつ同じものがあるので、
20÷2＝10(通り)

•樹形図を描く方法



•書き出し法

(A、B) (B、C) (C、D) (D、E)
(A、C) (B、D) (C、E)
(A、D) (B、E)
(A、E)

•計算で. . .

$$ {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10 $$

答え 10通り

5から連続して小さい順に2つの数をかけ、それを2から連続して1までの数でわるという意味。
Cは、Combination(コンビネーション)と読みます。

ちなみに、Cの場合は、

$$ {}_5C_2 = {}_5C_3 $$

となります。5この中から2つの組み合わせを選ぶということは、5この中から**選ばれなかった3こを選ぶ**ということと同じだからです。

1. 次のそれぞれの選び方は、順列で考えるべきですか。それとも組み合わせで考えるべきですか。それぞれの □ に、「順」か「組」かを書いた上で、問題に答えなさい。

(1) 1、2、3、4のカードが1枚ずつあります。このカードを並べて3ケタの整数を作ります。全部で何通りの整数ができますか。

□

(2) A、B、C、Dの4人の中から、3人を選びます。全部で何通りの選び方がありますか。

□

(3) 1、2、3、4のカードがそれぞれ20枚ずつあります。このカードを並べて3ケタの整数を作ります。全部で何通りの整数ができますか。

□

(4) A、B、C、Dの4人の中から、3人の生きもの係を選びます。全部で何通りの選び方がありますか。

□

(5) 10人の中から、委員長、副委員長、書記の3人を選びます。全部で何通りの選び方がありますか。

□

(6) 1、2、3、4、5、6のカードが1枚ずつあります。このカードの中から3枚を選びます。全部で何通りの選び方がありますか。

□

(7) A、B、C、Dの4人を1列に並べます。全部で何通りの並べ方がありますか。

□

(8) 国語、算数、理科、社会、音楽、家庭科、図工、体育の8教科の期末テストを行うとき、1日目に行う2教科の選び方は全部で何通りになりますか。

□

(9) 白いご石3個と黒いご石2個を横1列に並べます。並べ方は全部で何通りありますか。

□

2.カード並べ

ーカードを並べて整数を作るという問題。

(1) 同じ数字のカードがないケース

例題:　1、2、3、4、5のカードが1枚ずつあります。
①3枚を並べて3ケタの整数を作るとき、何通りの整数ができますか。

1、2、3、4、5
↓ブチこむ

5　4　3

5×4×3　=60

答え　:　60通り

②4枚を並べて4ケタの整数を作るとき、何通りの整数ができますか。

1、2、3、4、5
↓ブチこむ

5　4　3　2

5×4×3×2　=120

答え　:　120通り

例題:　0、1、2、3、4のカードが1枚ずつあります。
①3枚を並べて3ケタの整数を作るとき、何通りの整数ができますか。

0、1、2、3、4
↓ブチこむ

4　4　3

4×4×3　=48

※ 百の位だけは、0を使うことはできないので4通りになる。

答え　:　48通り

②4枚を並べて4ケタの整数を作るとき、何通りの整数ができますか。

0、1、2、3、4
↓ブチこむ

4　4　3　2

4×4×3×2　=96

※ 千の位だけは、0を使うことはできないので4通りになる。

答え　:　96通り

(1) 同じ数字のカードがあるケース

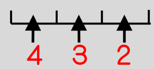
例題:　1、1、2、3、4の5枚のカードがあります。
①3枚を並べて3ケタの整数を作るとき、何通りの整数ができますか。

まずは、「　　　　　　」をする。

(ア)ノーマルパターン(1、2、3、4を1枚ずつ使う)

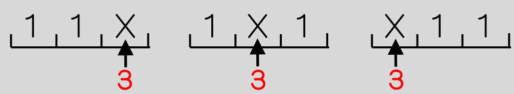
1、2、3、4

↓ブチこむ



4×3×2 ＝24(通り)

(イ)1が2枚入るパターン



3×3 ＝9(通り)

24＋9 ＝33(通り)

答え ： 33通り

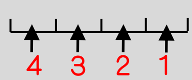
②4枚を並べて4ケタの整数を作るとき、何通りの整数ができますか。

まずは、「場合分け」をする。

(ア)ノーマルパターン(1、2、3、4を1枚ずつ使う)

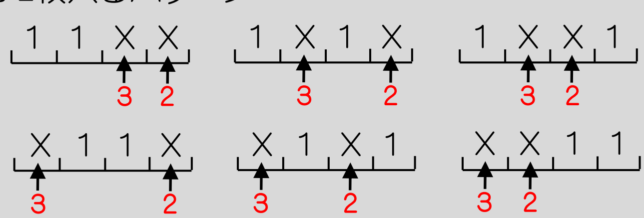
1、2、3、4

↓ブチこむ



4×3×2×1 ＝24(通り)

(イ)1が2枚入るパターン



3×2×6 ＝36(通り)

24＋36 ＝60(通り)

答え ： 60通り

2. 1、1、1、2、2、3の6枚のカードを使って3ケタの整数を作ります。全部で何通りの整数が作れますか。（サイダ中）

3. 1～9のカードがそれぞれ1枚ずつあります。（サイダ中）

（1）この中から2枚を選んだとき、和が10になるのは何通りありますか。

（2）この中から2枚を選んだとき、和が偶数になるのは何通りありますか。

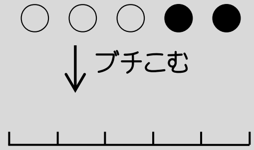
（3）この中から3枚を選んだとき、和が10になるのは何通りありますか。

3. ご石並べ

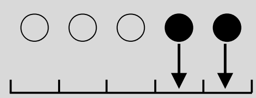
ー白と黒のご石を一列に並べるなどという問題。

（1）数がぴったりのケース

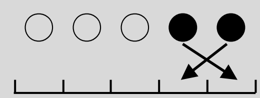
例題: 白のご石が3個、黒のご石が2個あります。これを1列に並べるとき、何通りの並べ方がありますか。



カード並べとちがうのは、**同じ色のご石には順番がない**ので、



と



は、

同じことと考えなければならないことです。つまり、上の2つは「1通り」になってしまうということです。

ご石を「ブチこむ」のですが、黒のご石の置き場所さえ決めれば、
白のご石の置き場所は自然に決まりますよね…

○●○○●

少ない方のご石の置き場所を考えるだけで、OK！

では黒のご石の置き場所を考えてみましょう。まずは書き出し法で…

●●○○○　○●●○○　○○●●○　○○○●●
●○●○○　○●○●○　○○●○●
●○○●○　○●○○●
●○○○●

よくよく考えてみると、これって「5つの部屋からどの2つの部屋を選ぶか」というのと同じですね。つまり、、、

$${}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

答え　10通り

(2)数があまるケース

例題:　白のご石が3個、黒のご石が4個あります。この中から5個を選んで1列に並べるとき、何通りの並べ方がありますか。

○○○●●●●

↓ブチこむ

まずは、「場合分け」をします。

(ア)黒が4つのパターン

(イ)黒が3つのパターン

(ウ)黒が2つのパターン

~~(エ)黒が1つのパターン~~ … これはないですね。
もちろん全部白のパターンもありませんね。

（ア）黒が4つのパターン

●●●●○

●●●○●

●●○●●

●○●●●

○●●●●

これって、「5つの部屋のどこの部屋を1つ選ぶか」というのと同じですね。

つまり、 ${}_5C_1$ ＝5通り

（イ）黒が3つのパターン

●●●○○　●○●●○　○●●●○　○○●●●

●●○●○　●○●○●　○●●○●

●●○○●　●○○●●　○●○●●

上のように、 ${}_5C_3$ ＝10通り

（ウ）黒が2つのパターン

●●○○○　○●●○○　○○●●○　○○○●●

●○●○○　○●○●○　○○●○●

●○○●○　○●○○●

●○○○●

上のように、 ${}_5C_2$ ＝10通り

（ア）＋（イ）＋（ウ）＝　5＋10＋10　＝25（通り）

答え　：　25通り

4. サイコロの目の出かた

－大小2つのサイコロの場合 ⇒ 順番を考える⇒**順列**
－同じ大きさのサイコロの場合 ⇒ 順番を考える必要はない⇒**組み合わせ**

ちなみに、大小2つのサイコロを転がすとき、同時に転がしても1つずつ別々で転がしても、同じことです。

例題: 大小2つのサイコロをころがします。
(1) 出た目の和が5以下になるのは何通りですか。

(大、小)の出た目を、書き出し法で下のように書き出します。

$\boxed{(1、1)}$	$\boxed{(2、1)}$	$\boxed{(3、1)}$	$\boxed{(4、1)}$	(5、1)	(6、1)
$\boxed{(1、2)}$	$\boxed{(2、2)}$	$\boxed{(3、2)}$	(4、2)	(5、2)	(6、2)
$\boxed{(1、3)}$	$\boxed{(2、3)}$	(3、3)	(4、3)	(5、3)	(6、3)
$\boxed{(1、4)}$	(2、4)	(3、4)	(4、4)	(5、4)	(6、4)
(1、5)	(2、5)	(3、5)	(4、5)	(5、5)	(6、5)
(1、6)	(2、6)	(3、6)	(4、6)	(5、6)	(6、6)

答え ： 10通り

(2) 出た目の積が奇数になるのは何通りですか。

$\boxed{(1、1)}$	(2、1)	$\boxed{(3、1)}$	(4、1)	$\boxed{(5、1)}$	(6、1)
(1、2)	(2、2)	(3、2)	(4、2)	(5、2)	(6、2)
$\boxed{(1、3)}$	(2、3)	$\boxed{(3、3)}$	(4、3)	$\boxed{(5、3)}$	(6、3)
(1、4)	(2、4)	(3、4)	(4、4)	(5、4)	(6、4)
$\boxed{(1、5)}$	(2、5)	$\boxed{(3、5)}$	(4、5)	$\boxed{(5、5)}$	(6、5)
(1、6)	(2、6)	(3、6)	(4、6)	(5、6)	(6、6)

答え ： 9通り

4. 大小2つのサイコロを同時に投げたとき、目の数の和が5の倍数になるのは何通りありますか。(明治学園中)

5. 同じ大きさの3つのサイコロを同時に投げたとき、目の数の積が奇数になることがあります。 その積は全部で何通りありますか。(サイダ中)

5. 投票

こう　ほ　しゃ
─ 候補者に勝て！

選挙で当選するためには、次点でおしくも当選できなかった人よりも1票だけでも得票数が多ければ良いのです。

例題:　40人のクラスで2人の委員を選ぶために、1人1票の投票を行います。
当選するためには、少なくとも何票が必要ですか。

もちろん、

40÷2＝20　20＋1＝21(票)

あればまちがいなく当選ですね。ところが答えはもっと小さくなります。

2人が当選したということは、3人目が落選したことになります。クラス中の票が、この3人だけに集中して均等に分散したけども、3人目の人だけは1票差で落選したと考えます。

40÷3＝13あまり1　13＋1＝14(票)

答え　：　14票

6. 150人が1人1票の投票をして4人の候補者の中から3人の議員を選びます。当選するためには、最低何票あれば良いですか。(サイダ中)

7. 150人が1人1票の投票をして6人の候補者の中から3人の議員を選びます。当選するためには、最低何票あれば良いですか。(サイダ中)

8. 150人が1人1票の投票をして10人の候補者の中から3人の議員を選びます。当選するためには、最低何票あれば良いですか。(サイダ中)

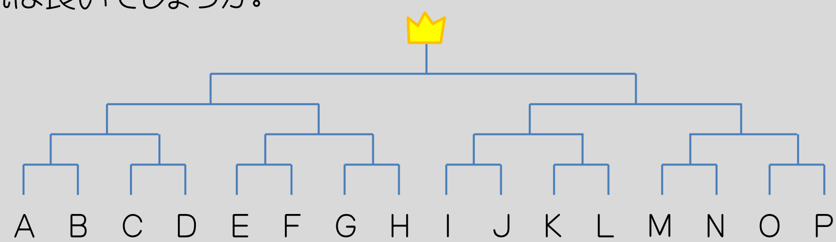
6. 試合数

ー優勝が決まるまでに、全部で何試合すれば良いですかなどという問題。

試合形式によって、考え方が違います。「勝ち抜き戦」と「総当たり戦」を押さえておきましょう！

(1) 勝ち抜き戦（トーナメント戦） ••• あたらないチームがあります。

例題: 16チームで勝ち抜き戦を行います。優勝が決まるまでに、全部で何試合すれば良いでしょうか。



答え ： 15試合

答えは**15試合**です。あれ？16チームで15試合？
じゃ～、36チームだと35試合なの？ ⇒はい、そうです。

それぞれの試合で、勝ちを決めるのではなく「**負けを決めるための試合を行う**」と考えましょう！16チームのうち1チームだけが優勝ですから、残り15チームは負けですね。

(2) 総当たり戦（リーグ戦） ••• すべてのチームがあたります。

例題: 4チームで総当たり戦を行います。優勝が決まるまでに、全部で何試合すれば良いでしょうか。

	Aチーム	Bチーム	Cチーム	Dチーム
Aチーム		○	○	×
Bチーム	×		○	○
Cチーム	×	×		○
Dチーム	○	×	×	

4チームの中からどの2チームを選ぶか、その選び方を考えるだけではありませんか？
ということは•••？

$$ {}_4C_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6 $$

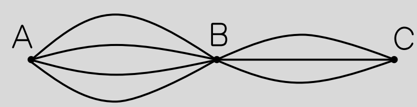
答え ： 6試合

9. 夏の全国高校野球は、49チームで争われます。優勝校が決まるまでに全部で何試合すれば良いですか。(サイダ中)

10. サッカーのリーグ戦で、4チームがホームアンドアウェー方式で試合を行うとき、全部で何試合を行えばよいですか。(サイダ中)

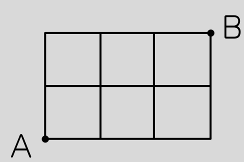
7. 遠回りしない道順

ー下の絵で、AからBを通ってCに行く道順は全部で何通りありますか？ただし、遠回りしないものとします。



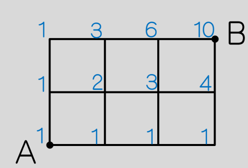
AからBに行くのに**4通り**、BからCに行くのに**3通り**なので、全部で **4×3＝12**、つまり**12通り**ですね。ここは理解していますか？

例題: 下のような碁盤のような道の、Aをスタートして遠回りせずにBに行くための方法は何通りありますか。

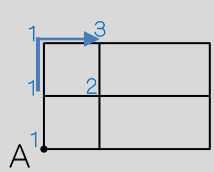


解法その1　プラナリア解法（1ー1解法）

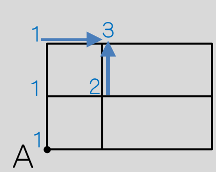
複雑な形の碁盤の目や、工事中があるときは、この方法でいきます。



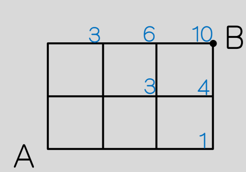
A地点から出発したプラナリアは上と右の2つに分裂します。次の交差点でもBに向かって進むときにどのように分裂するか考えます。



角では分裂しません。



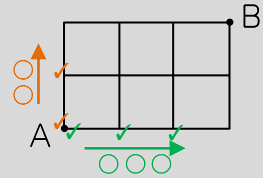
合流地点では数をたします。



B地点に集まってきたプラナリアの数が答えです。

解法その2　C解法

プラナリアの分裂の危機ポイントを数えます。



まずは、たて軸と横軸の分裂危機ポイントに✓印を書き、同じ数の〇の数を書いておきます。

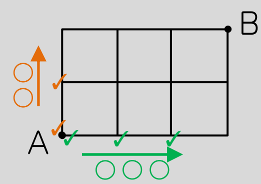
上の図では、〇〇＋〇〇〇＝5個で、たて軸は〇〇＝2個ですね。

$$ {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10 $$

もちろん、${}_5C_3$ でも10でしたね。

解法その3　！（びっくり）解法

やはり、プラナリアの分裂の危機のポイントを数えます。



先ほどと同じようにまず、たて軸と横軸の分裂危機ポイントに✓印を書き、同じ数の〇の数を書いておきます。

〇〇＋〇〇〇＝5個で、たて軸は〇〇＝2個、横軸は〇〇〇＝3個ですね。

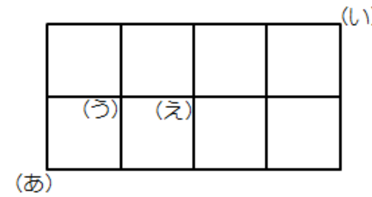
$$ \frac{5!}{2!\times3!} = \frac{5\times\overset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{3\times2\times1}}{\cancel{2}\times1\times\cancel{3\times2\times1}} = 10 $$

※　！（ビックリマーク）は「階乗（かいじょう）」の意味です。
　10！＝10×9×8×7×6×5×4×3×2×1　になります。

答え　：　10通り

演 習

11. 右の図で、(あ)から(い)まで遠まわりをせずに行く方法を考えます。
(大手門学院大手前中)

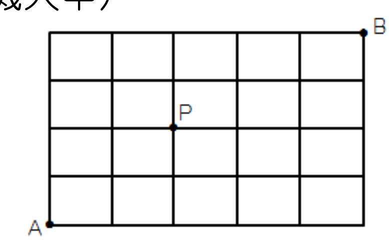


(1) 全部で何通りの行き方がありますか。

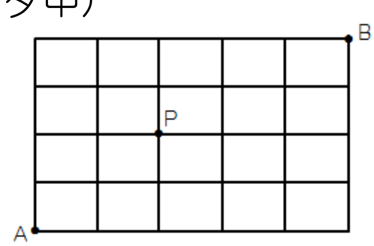
(2) (う)を通る行き方は何通りありますか。

(3) もし(う)と(え)の間の道が通れないとすると、全部で何通りになりますか。

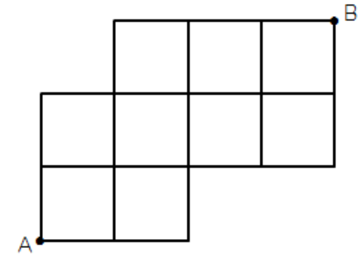
12. 次のような道があります。 A地点からB地点まで行く最短の道順のうち、P地点を通る道順は何通りありますか。(東京電機大中)



13. 次のような道があります。 A地点からB地点まで行く最短の道順のうち、P地点を通らない道順は何通りありますか。(サイダ中)



14. 右のような道があります。遠まわりしないで
A地点からB地点まで行く方法は何通りですか。
（サイダ中）



15. 放送委員が男子5人、女子3人います。男子から委員長を、女子から副委員長をそれぞれ1人選び、残った男女6名の中から道具係を2人選びます。選び方は全部で何通りありますか。（青陵中）

16. Aチームと Bチームが対戦し、先に4勝した方が優勝となる野球の試合があります。6試合をしてAが優勝するときの勝ち負けを表すと、例えば下のようになります。この例以外に、6回目の試合でAチームの優勝が決まるのは何通りありますか。ただし、引き分けは無いものとします。（慶應普通部）

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目
○	×	○	○	×	○

解　答

1.　(1) 順 24通り　(2) 組 4通り　(3) 順 64通り　(4) 組 4通り
(5) 順 720通り　(6) 組 20通り　(7) 順 24通り　(8) 組 28通り
(9) 組 10通り

2.　19通り

3.　(1) 4通り　(2) 16通り　(3) 4通り

4.　7通り

5.　10通り

6.　38票

7.　38票

8.　38票

9.　48試合

10.　12試合

11.　(1) 15通り　(2) 8通り　(3) 9通り

12.　60通り

13.　66通り

14.　30通り

15.　225通り

16.　9通り