ハイレベル小5算数
No.13

立体図形②

齋田算数理科教室®

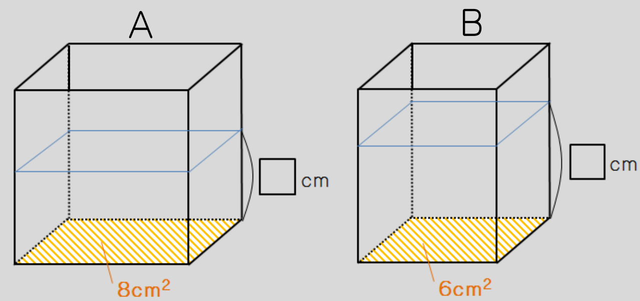
氏名:

講　義　　※この単元は内容が多いため、翌週の演習にも講義が続きます。

1. 底面積と深さの関係

―同量の水を入れたとき、底面積と水の深さの関係は、　　　　になる。

例題 ： 右の2つの容器にそれぞれ48cm³の水を入れました。水の深さはそれぞれ何cmになりますか。



状況を整理してみよう！

	A	B
底面積	8cm² 4	6cm² 3
水の深さ	6cm ③	8cm ④

（逆比）

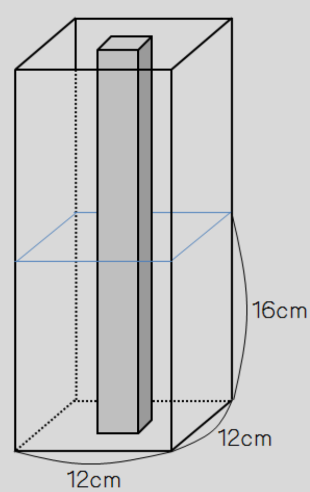
答え ： A･･･6cm、B･･･8cm

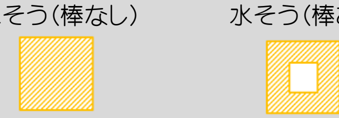
2. 水入れ（ジャマものあり）

―ジャマものがどこまで影響（えいきょう）するのかを慎重（しんちょう）に考えよう！

例題: 底面の一辺が12cmの正方形である深さ30cmの直方体の水そうに、深さ16cmまで水が入っています。この中に、底面の一辺が4cmの正方形で高さが30cmの金属のぼうを立てます。水面の高さは何cmになりますか。

金属の棒が水そうの高さと同じなので、水ぼつ＝答えは30cmである。水ぼつするかどうか考え、水ぼつしないと分かれば、「底面積と深さ」の関係で解いてしまおう！





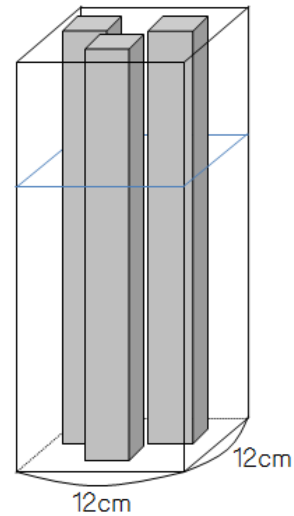
	水そう（棒なし）	水そう（棒あり）
底面積	144cm² 9	128cm² 8
水の深さ	⑧	⑨

（逆比）

⑧＝16cm
①＝2cm
⑨＝18cm

答え ： 18cm

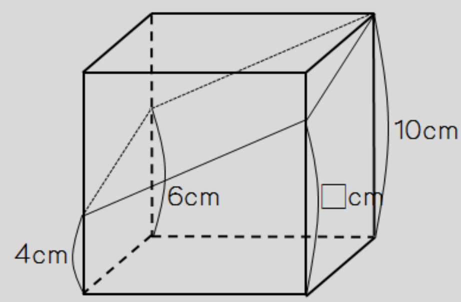
1.　前のページの「水入れ（ジャマものあり）」の問題において、金属のぼうを3本立てた場合の水面の高さは何cmになりますか。



3. 平均の策

ー立方体の切断や立方体の容器に水入れの問題で、4か所の長さ（深さ）は全体の平均から、かんたんに求めることができる。

例題 ： 一辺が10cmの立方体を右の図のように切断します。



（1）□にあてはまる数字を答えなさい。
ヒント:向かい合う高さ（深さ）の和は一定。

10＋4＝□＋6
□＝8

答え ： 8cm

（2）切断された立体のうち、大きい方の体積を求めなさい。
ヒント:変な形の体積を求めるのではなく、全体の高さ平均を求めて底面積とかける。

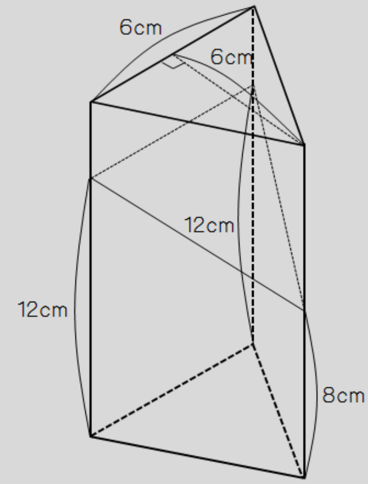
$$\text{求める立体の高さの平均} = \frac{4+6+8+10}{4}$$
$$= 7\ (\text{cm})$$

体積＝10×10×7
＝700

答え ： 700cm³

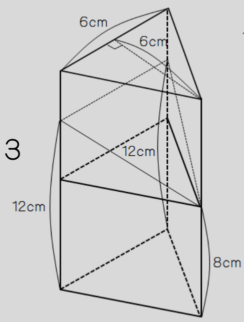
3. 平均の策（つづき）

ー三角柱の切断や水入れにおいても、「平均の策」は使えます。



例題 ： 次の図のような底面の形が二等辺三角形であり、高さが16cmの三角柱があります。この三角柱を図のように切断したとき、大きい方の立体の体積を求めなさい。

ー「平均の策」を知らない場合の解き方。
⇒三角柱＋三角すいに分解



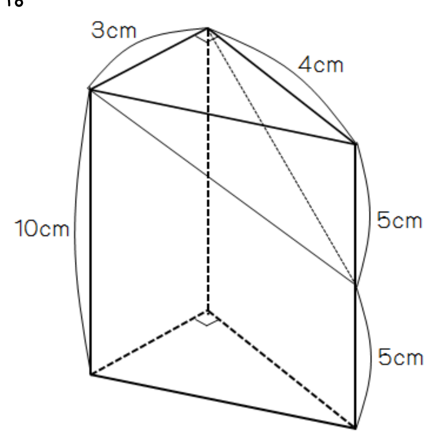
三角柱の体積 ＝18×8
＝144
三角すいの体積＝6×4×6÷3
＝48
求める体積 ＝144＋48
＝192

ー「平均の策」を使った解き方。
⇒底面積×平均の高さ

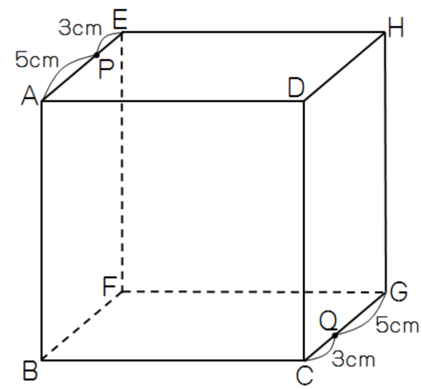
求める体積 $=18\times\left(\dfrac{12+12+8}{3}\right)$
＝6×（12＋12＋8）
＝192

答え ： 192cm^3

2. 右の図のような三角柱があります。 三角柱を図のように切断したとき、切断された大きな方の立体の体積を求めなさい。



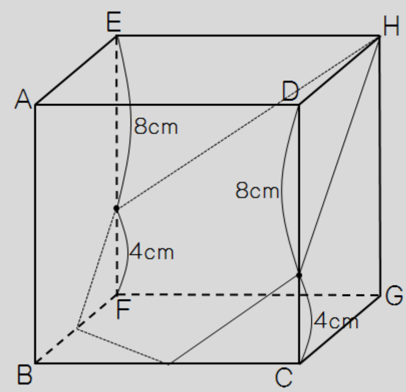
3.　図のような一辺が8cmの立方体があります。 この立方体を3点P、Q、Hを通るような平面で切ったとき、Fを含む方の立体の体積を求めなさい。



4. 切れてるチーズ解法

－立方体の切断面が五角形などになっている場合は、つけたして考える。

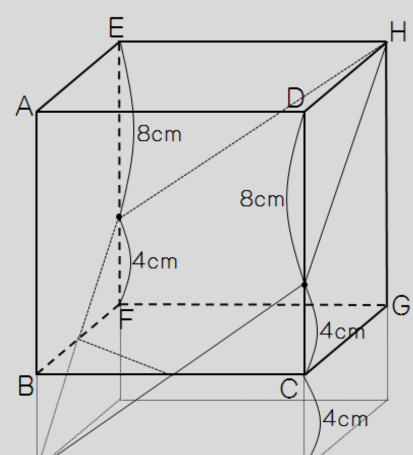
例題 ： 図のような一辺が12cmの立方体があります。この立方体を図のように切断したときに、Gを含む方の立体の体積を求めなさい。



まずは図形に分かる部分の長さを書き入れる。長さが分かったところで、右の下の絵のように、足りない部分をつけたす。

求める体積は、大きな直方体を真っ二つに切断した片割れから左下の小さな三角すいの体積を引いたもの。

$$体積＝12×12×16÷2－12×12×4＋6×6×\frac{1}{2}×4×\frac{1}{3}$$
$$＝1152－576＋24$$
$$＝600$$



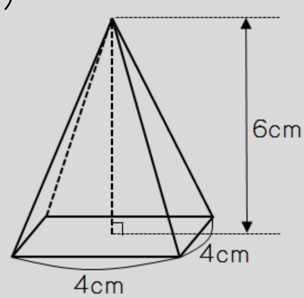
答え ： 600cm³

5. すい体の体積

ーすい体の体積 ＝ 底面積 × 高さ × $\boxed{}$

例題 ： 次のそれぞれの立体の体積を求めなさい。

(1)

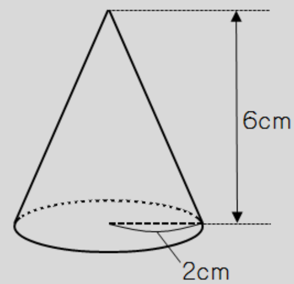


体積$=4\times4\times6\times\frac{1}{3}$

$=32$

答え ： 32cm^3

(2)



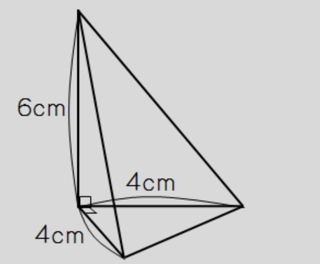
体積$=2\times2\times\pi\times6\times\frac{1}{3}$

$=8\pi$

$=25.12$

答え ： 25.12cm^3

(3)

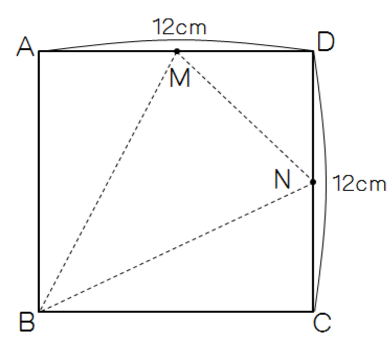


体積$=\frac{4\times4}{2}\times6\times\frac{1}{3}$

$=16$

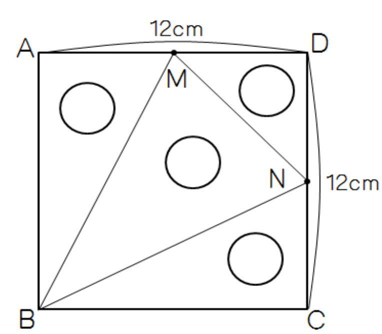
答え ： 16cm^3

4. 次の図のような一辺が12cmの正方形の紙を点線のように折り曲げて立体を作りました。 Mは辺ADを等しく分ける点、Nは辺DCを等しく分ける点です。



(1) 折り曲げによって分割された4つの三角形の面積の比を求め、右の図の○の中に数字を書きなさい。

(2) できあがった立体の体積を求めなさい。

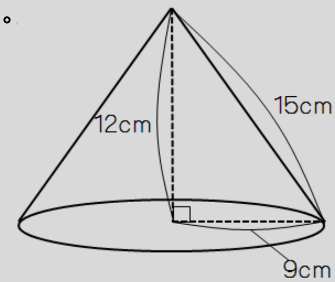


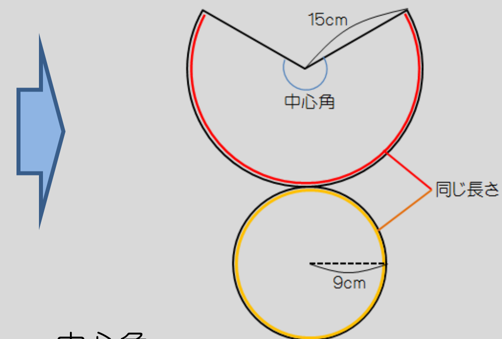
(3) できあがった立体について、BMNを底面としたとき、立体の高さは何cmになりますか。

6. 円すいの表面積

－円すいの側面積　＝ $\boxed{}$

母線の長さが分かっている場合は、上の式を覚えておくと楽です。円すいの表面積を求める問題では、まず円すいの「展開図」がどのようになるかを考えます。





$$\begin{cases} \text{弧の長さ} = \text{母線} \times 2 \times \pi \times \dfrac{\text{中心角}}{360^\circ} \\ \text{円周の長さ} = \text{半径} \times 2 \times \pi \end{cases}$$

「弧の長さ」と「円周の長さ」は同じになるので、右辺同士も同じになる。

$$\text{母線} \times 2 \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{360^\circ} = \text{半径} \times 2 \times \pi$$

$$\text{母線} \times \frac{\text{中心角}}{360^\circ} = \text{半径}$$

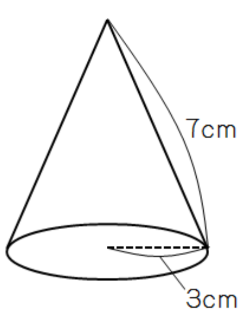
$$\boxed{\frac{\text{中心角}}{360^\circ} = \frac{\text{半径}}{\text{母線}}}$$

ここで、円すいの側面積（おうぎ形の部分）だけについて考えよう！

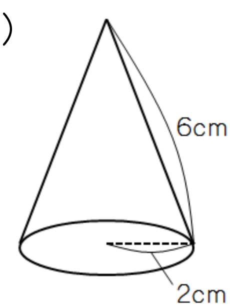
$$\begin{aligned} \text{側面積} &= \text{母線} \times \text{母線} \times \pi \times \frac{\text{中心角}}{360^\circ} \\ &= \text{母線} \times \text{母線} \times \pi \times \frac{\text{半径}}{\text{母線}} \\ &= \textbf{母線} \times \textbf{半径} \times \pi \end{aligned}$$

5. それぞれの円すいの表面積をそれぞれ10秒で求めなさい。（サイダ中）

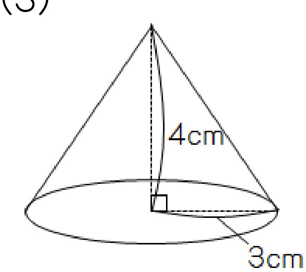
(1)



(2)



(3)



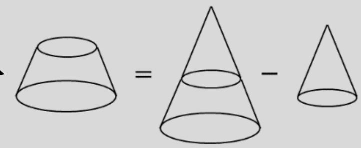
7. 円すい台の体積と表面積

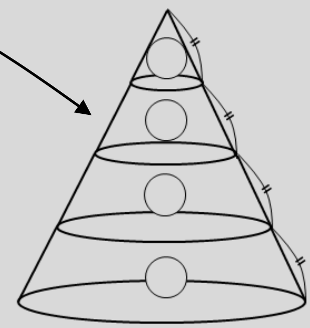
円すい台の体積

円すい台（プリン形）の体積を求めるには、次のいずれかの方法を使います。

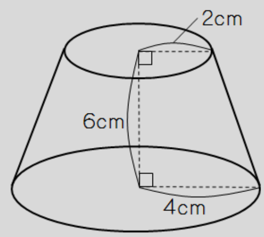
① 全体ー不要

② 体積比を利用





例題 ： 次の円すい台の体積を求めなさい。



「② 体積比を利用」を使って、、、

まず、上に乗っている架空（かくう）の円すいの体積を求める。

体積 $= 2\times2\times\pi\times6\times\frac{1}{3}$

$= 8\pi$

求める円すい台の体積はその7倍なので、

体積 $= 56\pi$

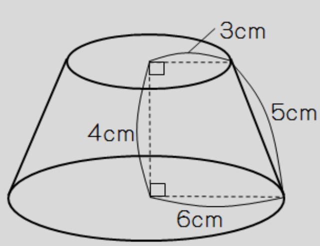
$= 175.84$

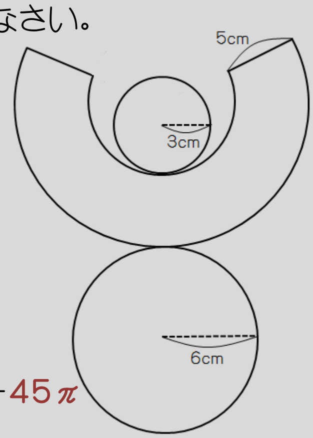
答え ： 175.84cm³

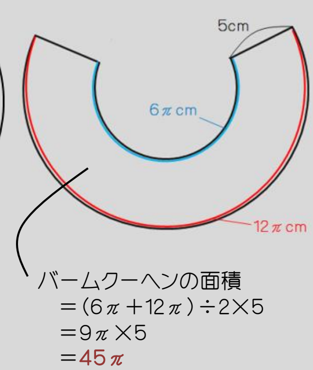
円すい台の表面積

展開図で考える。

例題 ： 次の円すい台の表面積を求めなさい。







表面積 $= 9\pi + 36\pi + 45\pi$

$= 90\pi$

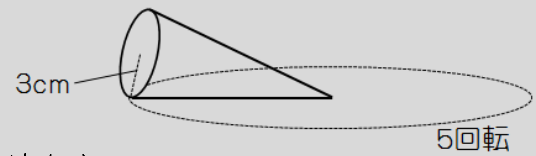
$= 282.6$

答え ： 282.6cm²

8. 円すい転がし

ー円すいの □ と □ の長さの比に着目する。

例題 ： 底面の半径が3cmの円すいを図のように机の上で転がします。円すいがちょうど5回転したところでもとの位置にもどってきました。



(1) 円すいの底面が通った長さを求めなさい。

円すいの底面の円周の長さは6π cm。これが5回転なので、

求める長さ ＝ 6π×5
＝ 30π
＝ 94.2

答え ： 94.2cm

(2) この円すいの母線の長さを求めなさい。

母線の長さは、(1)で求めた大きな円の半径にあたるので、

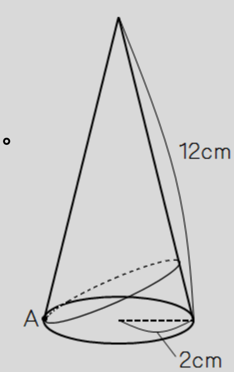
母線の長さ×2×π ＝ 30π **←ここで94.2ではなく30πにもどす。**
母線の長さ ＝ 15

答え ： 15cm

9. 円すいへの糸のまきつけ

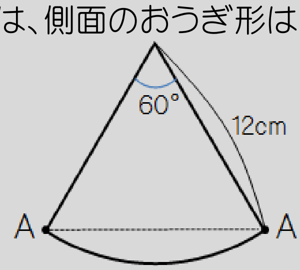
ー円すいの展開図のうち、側面のおうぎ形だけで考える。

例題 ： 底面の半径が2cm、母線の長さが12cmの円すいがあります。底面に点Aを取り、Aから円すいの側面を通るようにひもを一回転させせます。ひもの長さが最も短くなるようにするとき、ひもは何cm必要ですか。



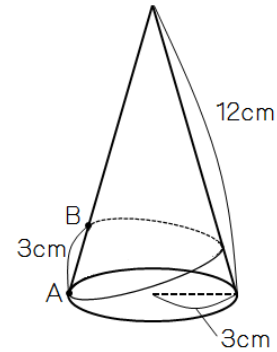
側面のおうぎ形の中心角 ＝ $360° \times \frac{2}{12}$
＝ 60°

ということは、側面のおうぎ形は…



答え ： 12cm

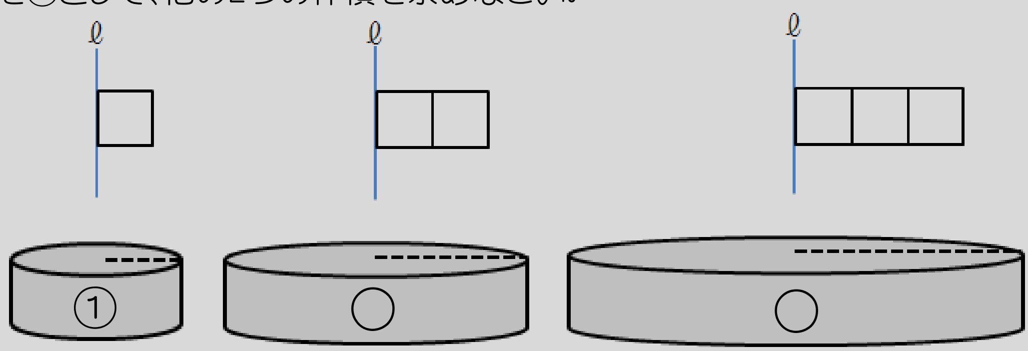
6.　底面の半径が3cm、母線の長さが12cmの円すいに、図のようにひもをかけます。 ひもの長さが最も短くなるようにするとき、ひもは何cm必要ですか。



10.　回転体の体積（1:2:4:5:7:8･･･の利用）

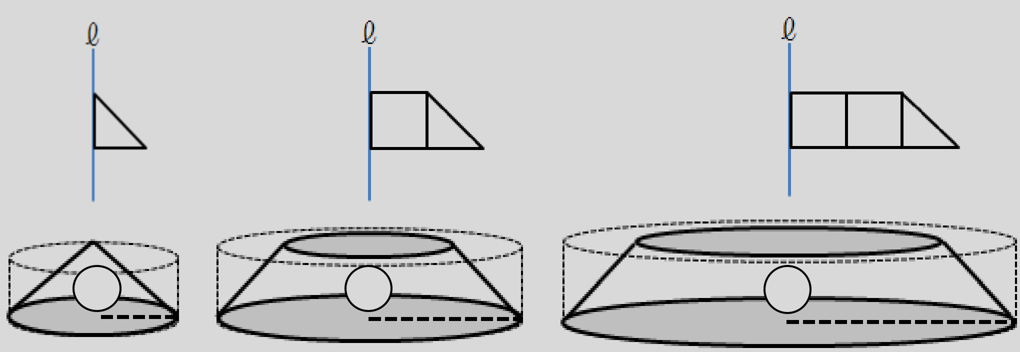
－　内側から順に、1:2:4:5:7:8･･･。

例題 ：一辺の長さが1cmの正方形をいろいろに組み合わせてかんたんな図形を作ります。この図形をそれぞれ図のように直線ℓのまわりに回転させます。 回転してできた立体の体積について、正方形が1個の場合の体積を①として、他の2つの体積を求めなさい。



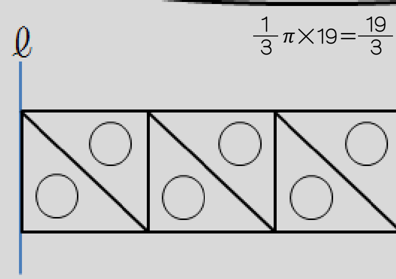
$1\times1\times\pi\times1=\pi$　　$2\times2\times\pi\times1=4\pi$　　$3\times3\times\pi\times1=9\pi$

次に、上で使った正方形の紙を真っ二つに切って、直角二等辺三角形をくっつけます。先ほどと同じように回転してできた立体の体積を求めなさい。

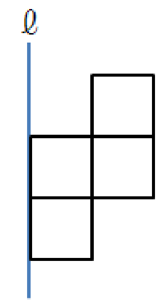


$1\times1\times\pi\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\pi$　　$\frac{1}{3}\pi\times7=\frac{7}{3}\pi$　　$\frac{1}{3}\pi\times19=\frac{19}{3}\pi$

これをまとめると、
回転させたときの体積比は、
右のようになります。

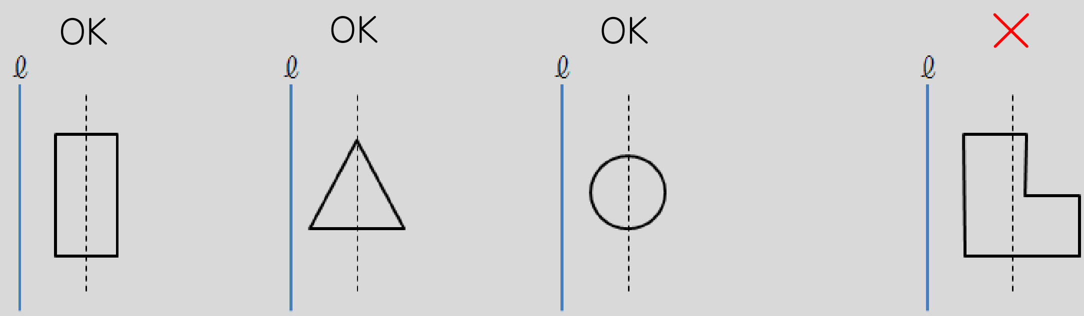


7.　一辺の長さが1cmの正方形を図のように4個組み合わせた図形を直線ℓを軸に1回転させたときにできる立体の体積を求めなさい。(國學院久我山中)



11. 回転体の体積と表面積

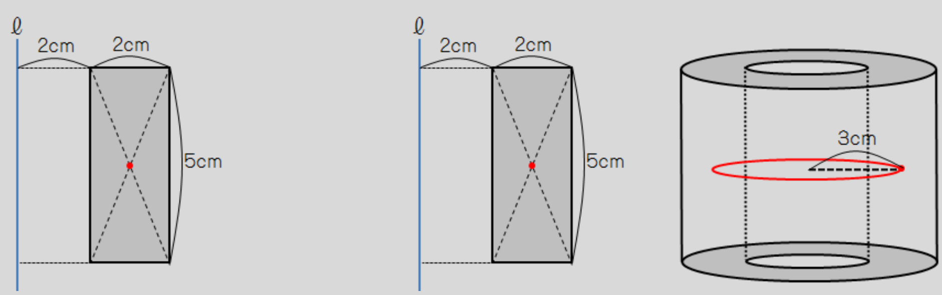
－ 回転させる図形が、回転軸に平行な直線に対して線対称である場合、回転させてできた立体の「体積」および「表面積」は、次の方法で求めることができます。



体積　＝(回転の)中心が通る長さ×**面積**
表面積　＝(回転の)中心が通る長さ×**まわりの長さ**

実はこれも、「　」の利用です。

例題 ： たての長さが5cm、横の長さが2cmの長方形の紙を、下の絵のように直線ℓのまわりに高速回転させます。このときにできた立体の体積と表面積を求めなさい。



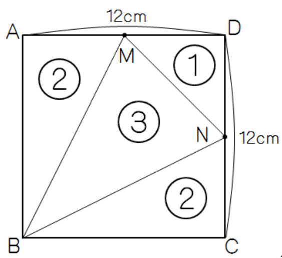
体積　＝ $5 \times 2 \times 6\pi$
　　　＝ 60π
　　　＝ 188.4

表面積 ＝ $(2+5) \times 2 \times 6\pi$
　　　＝ 84π
　　　＝ 263.76

答え ： 体積 ： 188.4cm^3、表面積 ： 263.76cm^2

解　答

1.　24cm
2.　$50cm^3$
3.　$256cm^3$
4.　(1)



(2)　$72cm^3$　(3)　4cm

5.　(1)　$94.2cm^2$　(2)　$50.24cm^2$　(3)　$75.36cm^2$
6.　15cm
7.　$25.12cm^3$